数理解析研究所講究録
721巻 1990年 9-15

Braid群の表現とその Hodge analogue について.

千葉大.教養 寺松友秀

1. Introduction
2. 織田-T.の仕事.
3. Hodge analogue. — Determinant of Appel's H.G.F. —

1. Introduction

まず初めに. Topologicalな. Magnus表現の話をしよう.
$\mathcal{M}_{n-1}$を. $\mathbb{A}^1$内の$(n-1)$個の異なる点の全体とする。すなわち.

$$\mathcal{M}_{n-1}=\{(x_i)_{i=1,\cdots,n-1}\in(\mathbb{A}^1)^{n-1} \mid x_i\neq x_j \text{ if } i\neq j\}$$

とする。さらに. $\mathcal{M}_n$から. $\mathcal{M}_{n-1}$への写像φ_nを. $\mathcal{M}_n$の点. $(x_1,\cdots,x_n)$に対して$(x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathcal{M}_{n-1}$を対応させる写像とする. この時. φ_nは typical fiber が. $\mathbb{P}^1$から$\{\infty,x_1,\cdots,x_{n-1}\}$を除いたものになる、fiber bundle になる。しかもこの fiber bundle は. C^∞-section が存在する。ゆえに. 自然な準同型 φ_{n*}: $\pi_1(\mathcal{M}_n,\tilde{\eta})\longrightarrow\pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)$は全射となる. そして. section s からひきおこされる s_* によって. $\pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)$は. $\mathrm{Ker}(\varphi_{n*})$に作用する. (ここで ηは. $\mathcal{M}_{n-1}$の点.. $\tilde{\eta}$は. ηの上にある. section上の点..). $\mathrm{Ker}(\varphi_{n*})$は. $\pi_1(\mathbb{P}^1-\{x_1,\cdots,x_{n-1},\infty\})$ (ここで. $\eta=(x_1,\cdots,x_{n-1})$) となり. この群をGとおく. そして. $\pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)$の Gへの作用は. $G'=[G,G]$, $G''=[G',G']$とおくと. G'/G''への$\pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)$の作用をひきおこす. ここで$M=G'/G''$とおくと $\pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)\longrightarrow\mathrm{Aut}(M)$なる表現が得られたことになる。Mの構造をくわしく見てみよう. $G^{ab}=G/[G,G]$, $A=\mathbb{Z}[G^{ab}]$とおくと. Mには. conjugation により. G module の構造がはいるが. この action は. G^{ab}を経由し. 従って. Mには A-module の構造がはいる。

Proposition　$\pi_1(\mathfrak{N}_{n-1},\eta)$のMへの表現は. A-linearである。

Definition (Magnus representation)　これによって得られた. $\pi_1(\mathfrak{N}_{n-1},\eta)\to \mathrm{Aut}_A(M)$ なるA上の$\pi_1(\mathfrak{N}_{n-1},\eta)$の表現を. Magnus representation という.

さて. Mの A-module としての構造であるが. Gは. rank$(n-1)$ の free group であるので. これを利用して. Mの構造を計算することができる. 結果はどうなるかと言えば. $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ を. $x_1,\cdots,x_{n-1},\infty$ の local monodromy を. Gの元に. 延長したものとする。さらに. うまく $\gamma_1\sim\gamma_n$ をとり. 基本関係が. $\gamma_1\cdots\gamma_n=e$ となる様にする. Gは. この時. $\gamma_1,\sim\gamma_{n-1}$で生成される free group となる。そして. Aでの $\gamma_1\sim\gamma_{n-1}$ の像を. $t_1\sim t_{n-1}$ とおく. Mは. この時. A上で. $[\gamma_i,\gamma_j]=-[\gamma_j,\gamma_i]$ $(1\leq i<j\leq n-1)$ で生成され. 関係式は. $(t_i-1)[\gamma_j,\gamma_k]+(t_j-1)[\gamma_k,\gamma_i]+(t_k-1)[\gamma_i,\gamma_j]=0$ $(1\leq i<j<k\leq n-1)$ で与えられる. この事から. Mは. Aの商体まで tensor すれば. その次元は. $n-2$ となる。さらに. $\pi_1(\mathfrak{N}_{n-1},\eta)$ の作用で不変な. M の rank$(n-2)$ の free A submodule が存在するという事実を認めれば. Magnus表現の determinant 表現. $\pi_1(\mathfrak{N}_{n-1},\eta)\longrightarrow A^\times$ が得られる.

2. 織田ーT. の仕事.

lを素数として. $l>n$ を仮定する。(外ゅをとる時もう少しデリケートな議論をいとわなければ. たぶんこの仮定は必要ないと思われる.) 1でのべた事は. l-adic version を考えることにより. 代数的な構成が可能である. kを 標数0の体として. 1のlゅ乗根をすべて含むものとする. ηを. $\mathfrak{N}_{n-1}$の geometric generic point,

$\mathbb{P}^1_\eta - \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \infty\}$ を fibration $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n-1}$ の η における geometric fiber とする。この時、$G^{(\ell)}$ を $\pi_1(\mathbb{P}^1_\eta - \{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}, \infty\}, \bar{\eta})$ の maximal pro-ℓ quotient とすれば、これは rank$(n-1)$ の free pro-ℓ group である。$A^{(\ell)}$ を $\mathbb{Z}_\ell$ 上の $(G^{(\ell)})^{ab}$ の completed group ring とすると $A^{(\ell)} \cong \mathbb{Z}_\ell[[u_1, \cdots, u_{n-1}]]$, $u_i = t_i - 1$ となる。第一章の topological case の時にとった continuous section s のかわりに、Beli model をとることにより、いわゆる Arithmetic な Magnus representation を構成することができる。

$$\Phi : \pi_1(\mathcal{M}_{n-1}, \eta) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{A^{(\ell)}} M^{(\ell)}.$$

ここで $M^{(\ell)}$ は $G^{(\ell)}$ の 2 階の Meta abel 化である。すなわち $M^{(\ell)} = G^{(\ell)\prime} / G^{(\ell)\prime\prime}$ 。また、同様に、determinant をとることにより、$\det \Phi : \pi_1(\mathcal{M}_{n-1}, \eta) \longrightarrow (A^{(\ell)})^\times$ なる準同型も得られる。

織田 − T. [1] の主定理は、この homomorphism に関する記述である。その前に Kummer Character に関する Proposition を述べよう。以下群の右肩に (ℓ) をつけることにより、その max. proℓ quotient を表わす。

$\overline{\mathcal{M}_{n-1}} \cong (\mathbb{A}^1)^{n-1} - \bigcup_{i<j} D_{ij}$, $D_{ij} = \{(x_i) \in \mathbb{A}^{n-1} \mid x_i = x_j\}$ なので、D_{ij} の回りの monodromy group が、$\pi_1(\overline{\mathcal{M}_{n-1}}, \eta)^{ab}$ の自然な generator になっている。ゆえに、

$$(\pi_1(\overline{\mathcal{M}_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(\ell)} \cong \mathbb{Z}_\ell^{\oplus \frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \left(\cong k[\lambda_i, \tfrac{1}{\lambda_i - \lambda_j}]^\times \otimes \mathbb{Z}_\ell\right)$$

なる同型が得られる。さて、$(\pi_1(\mathcal{M}_{n-1}, \eta)^{ab})^{(\ell)}$ の $\lambda_i - \lambda_j$ に対する Kummer Character を $\rho_{ij} : \pi_1^{ab}(\mathcal{M}_{n-1}, \eta)^{(\ell)} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ とする。$\bigoplus_{i<j} \rho_{ij} : (\pi_1(\mathcal{M}_{n-1}, \eta)^{ab})^{(\ell)} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^{\oplus \frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ を ρ_{ij} の和とすれば、$\oplus \rho_{ij}$ は $(\pi_1(\overline{\mathcal{M}_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(\ell)}$

に制限すると.同型を与える。(ここで. $\oplus P_{ij}$ は.代数幾何的に定義したが.群論的にも表わせる.)

<u>Proposition</u> homomorphism $\det\Phi$ を. $(\pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(\ell)}$ に制限すると. $(a_{ij}) \in (\pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(\ell)} \cong \bigoplus_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \mathbb{Z}_\ell$

に対して.

$$\det \Phi((a_{ij})) = \prod_{i<j} ((1+u_i)(1+u_j))^{a_{ij}}$$

で与えられる.

このPropositionにより. $\pi_1(n_{n-1}, \eta)$ から. $(A^{(\ell)})^\times$ への homomorphism χ を.

$$\chi : \pi_1(n_{n-1}, \eta) \ni g \longmapsto \left(\prod_{i<j} ((1+u_i)(1+u_j))^{P_{ij}(g)}\right) \in (A^{(\ell)})^\times$$

で定義すると. 2つの Character Φ, χ^{-1} の積 $\Phi\cdot\chi^{-1}$ は. $\pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta)$ 上で trivial になる。そこで exact sequence

$$1 \longrightarrow \pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta) \longrightarrow \pi_1(n_{n-1}, \eta) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1$$

を考えれば. $\Phi\cdot\chi^{-1}$ は. $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \xrightarrow{\theta} (A^{(\ell)})^\times$ を factor する。その factorization θ は. 次の Main Theorem で表わされる。

<u>Main Theorem</u> (織田一T[1]) θ はいわゆる. "universal Jacobi sum" で書き表わされる. (参照 [2]).

3. Hodge analogue —— Appel の超幾何級数の行列式 ——

この章では. 上の結果の Hodge analogue を考察しよう. そのまず Introduction として. $\mathbb{A}^1$ 上の2点 λ_1, λ_2 の時の場合を考えてみる。

(1). 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の場合.

有限体 $\mathbb{F}_q$ は. 乗法群の中に μ_{ℓ^e} を含んでいるものとする. $\mathbb{F}_q^\times \supset \mu_{\ell^e}$. χ_1, χ_2 を μ_{ℓ^e} の non-trivial character で. さらに.

$\chi_1 \cdot \chi_2$ も non-trivial になっているものとする。$\mathcal{N}_2 =$ $\mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_q[\lambda_i, \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}]$ の maximal ideal $\mathfrak{m}$ で、$\mathfrak{m}$ は、$(\lambda_1-u_1, \lambda_2-u_2)$ $(u_i \in \mathbb{F}_q)$ となっているものとする。
ℓ を (十分大きく) $\mathrm{Char}\, \mathbb{F}_q = p$ と素な素数とする。
$\pi_1(\mathcal{N}_2, \eta)$ 内での $\mathfrak{m}$ での 1つの Frobenius を、Fr_m と書く。
(χ_1, χ_2) は、$A^{(\ell)}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に値をもつ character と考えられ、$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を、(χ_1, χ_2) によって $A^{(\ell)}$-algebra と思ったものを、$\overline{\mathbb{Q}}_\ell(\chi_1, \chi_2)$ と書く。この時、$M^{(\ell)} \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\chi_1, \chi_2)$ は1次元になる。

$$\Phi = \det \Phi : \pi_1(\mathcal{N}_2, \eta) \longrightarrow M^{(\ell)} \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\chi_1, \chi_2)$$
$$\underset{\mathrm{Fr}_m}{\cup\!\!\shortmid}$$

そこで、$\mathrm{tr}\,(\Phi(\mathrm{Fr}_m) \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\chi_1, \chi_2))$ を計算すると、それは、Lefschetz の fixed pt formula より、適当な Beli lifting をとれば、$\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi_1(x-u_1)\chi_2(x-u_2)$ と等しく、$y = (x-\ \ 1)/(u_2-u_1)$ と変数変換すると、上式は、

$$\sum_{y \in \mathbb{F}_q} \chi_1((u_2-u_1)y)\, \chi_2((u_2-u_1)(y-1))$$
$$= \chi_1(u_2-u_1)\chi_2(u_2-u_1) \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \chi_1(y)\, \chi_2(y-1)$$

となり、Kummer character と、Jacobi の和の積になっている。

(2) 複素数体上で Period を考えた場合、

X : $\exp z_1 = x - \lambda_1$, $\exp z_2 = x - \lambda_2$ で定義されるRiemann 面が $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{\lambda_1, \lambda_2\}$ の universal abelian covering である。
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} - 2\pi i \mathbb{Z}$ が、$\alpha_1 + \alpha_2 \notin 2\pi i \mathbb{Z}$ とする。この時、$\pi_1(\mathbb{A}^1 - \{\lambda_1, \lambda_2\})$ の Character χ を、

$$\chi : \pi_1(\mathbb{A}^1 - \{\lambda_1, \lambda_2\}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$
$$\lambda_i \text{ の monodromy} \longmapsto \exp(\alpha_i)$$

によって定義する。この時，$\omega = \exp(\alpha_1 - 1)z_1 \exp(\alpha_2 - 1)z_2 dx$ は，χ に付随する X 上の differential form となる。ここで，この differential form の period を考えると，形式的には，$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (x-\lambda_1)^{\alpha_1 - 1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2 - 1} dx$ となる。ただし，きちんとやるには，Riemann 面の branch をきちんと指定する必要はある。これができることは，認めて，以下形式的計算を進めよう。上式は，$y = (x-\lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ と変数変換をすることにより，

$$\int_0^1 (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1}(\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_2 - 1} y^{\alpha_1 - 1}(y-1)^{\alpha_2}(\lambda_2 - \lambda_1) dy$$
$$= (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}(-1)^{\alpha_2 - 1}\int_0^1 y^{\alpha_1 - 1}(1-y)^{\alpha_2 - 1} dy$$
$$= (\lambda_2 - \lambda_1)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}(-1)^{\alpha_2 - 1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

と変形される。ここでも同様に，Kummer character と，ガンマ関数の積の形になっていることは，興味深い。それでは，一般個数の点をぬいた時の Period の方にあたる，いわゆる，Hodge analogue は，どうなっているのであろうか。

$\mathbb{A}^1$ の 2 点の場合を考えた時もそうであった様に，　個の点で考える時も，covering 上の differential form と，topological cycle の branch をきちんと指定する必要がある。その正確な，period としての解釈は，準備中の拙論 [2] を見てもらうことにして，ここでは，もう少し，Sophisticate されていない，分かりやすい形で述べることにしよう。

$n \geqq 3$ とする．$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を実数で．$\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ を満たすものとする．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を正の実数とする。
$1 \leqq i, j \leqq n-1$ なる i, j に対して．特異積分 a_{ij} を．

$$a_{ij} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \prod_{p=1}^{i} (x-\lambda_p)^{\alpha_p - 1} \prod_{p=i+1}^{n} (\lambda_p - x)^{\alpha_p - 1} x^j \, dx$$

で定義すれば．収束することがわかる。この時．

<u>Theorem</u> (Hodge analogue)

行列 (a_{ij}) の行列式は．

$$\det (a_{ij})_{i,j} = \prod_{i=1}^{n} \left\{ (-1)^{i-1} \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_j) \right\}^{\alpha_i} \cdot \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1) \cdot \cdots \cdot \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}$$

となる。

上の定理において．λ_i，α_i について．両辺とも holomorphic なので．branch をうまくとれば．複素数 λ_i, α_i についても成り立つ．またこの定理は．前半が Kummer character の部分で．後半が Γ 関数となっていて．織田－T．の結果の Hodge analogue となっている．